Genève, le 23 mai 2009

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION
∂IFFERENTIAL

KLASSE 5A UND 5B

Lösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 1 : **4 Punkte**

"*George glaubt*", sagt der Mathematiker, "*dass 60 durch alle Zahlen teilbar ist. Er bemerkt, daß 60 durch 1, 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. Er untersucht noch ein paar Fälle wie 10, 20 und 30, die, wie er sagt, aufs Geratewohl herausgegriffen sind. Da 60 auch durch diese teilbar ist, betrachtet er seine Vermutung als hinreichend durch den experimentellen Befund bestätigt.*"

Obschon George richtig rechnet, macht er einen Fehler. Welchen ?

Antwort : Er schliesst vom Spezialfall auf das Allgemeine und macht eine nicht vollständige Induktion. Seine Aussage kann mit einem einzigen Gegenbeispiel widerlegt werden : $60/59$ ist nicht $\in \mathbf{N}$

Erklären Sie in in *eigenen* Worten *präzis* das *Prinzip* und den *Aufbau* der *Vollständigen Induktion.*

Erklärung : Man schliesst von einer speziellen auf eine allgemeine Aussage. Der Beweis besteht aus einer Verankerung und einem Induktionsschluss oder Induktionsschritt.

Aufgabe 2 : **4 Punkte**

Walker behauptet :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} + 7$$

Der Induktionsschritt funktioniert nämlich tatsächlich ! Jetzt ist Walker felsenfest überzeugt, dass seine Vermutung richtig ist.

Ihre Aufgabe besteht darin, dass sie Walker erklären, was er falsch macht. Danach beweisen Sie Ihm mit der Beweismethode der Vollständigen Induktion, dass gilt :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Erklärung : Walker vergisst die Verankerung. Seine Vermutung trifft für kein $n \in \mathbf{N}$ zu.

Beweis :

Verankerung : $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Induktionsschritt :

Voraussetzung :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Behauptung :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Aufgabe 3 : **4 Punkte**

a) An welchen Stellen ist die folgende Funktion unstetig ?

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-\pi)(3-x)}$$

Antwort : Bei π und 3.
Begründung : Da die Funktion bei π und 3 nicht definiert ist (geteilt durch Null).

b) Ermitteln Sie folgende Grenzwerte :

1.

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

2.

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Rechnung :

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(2-\triangle x)^2 - (2-\triangle x) - 2}{(2-\triangle x) - 2} = 3$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(2+\triangle x)^2 - (2+\triangle x) - 2}{(2+\triangle x) - 2} = 3$$

c) Falls die Funktion $\frac{x^2-x-2}{x-2}$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig fotsetzbar ist, dann schliessen Sie die "Lücke" mit einem Wert für $f(2)$ so, dass sie stetig in $\mathbf{R}$ ist.

Antwort : Sie ist stetig fortsetzbar mit $f(2) = 3$.

Aufgabe 4 : **8 Punkte**

a) Schreiben Sie den *Differenzenquotienten* allgemein für $x_0 = a$ einer Funktion $f(x)$. Und machen sie eine passende und gut beschriftete Zeichnung dazu.

Differenzenquotient :

$$\frac{f(a+\triangle x) - f(a)}{\triangle x}$$

oder :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Zeichnung :

b) Schreiben Sie den *Differenzenquotienten* der Sinusfunktion für $x_0 = 0$ (ohne ihn zu vereinfachen).

Differenzenquotient :

$$\frac{sin(0+\triangle x) - sin(0)}{\triangle x}$$

oder :

$$\frac{sin(x) - sin(0)}{x - 0}$$

d) Was ist die geometrische Bedeutung des *Differentialquotienten* (der Ableitung) ? Verdeutlichen Sie Ihre Aussage mit passenden Zeichnungen (Zeichentrickfilm) !

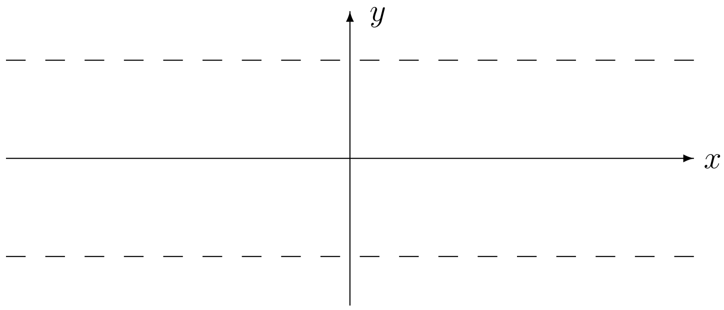
Es ist die Steigung $m = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$ der Tangente an den Graph.

c) Schreiben Sie den *Differentialquotienten* der Cosinusfunktion auf, ohne ihn auszurechnen.

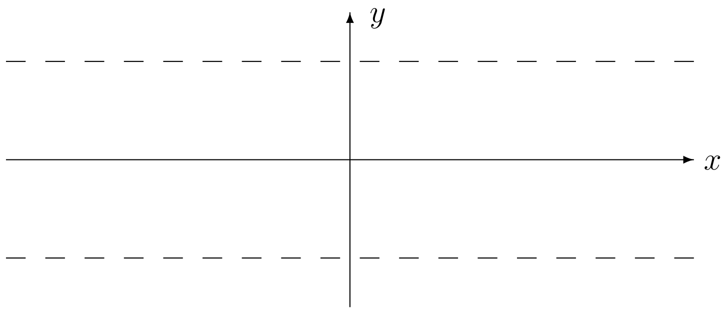
$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{cos(x+\triangle x) - cos(x)}{\triangle x}$$

Aufgabe 5 : **4 Punkte**

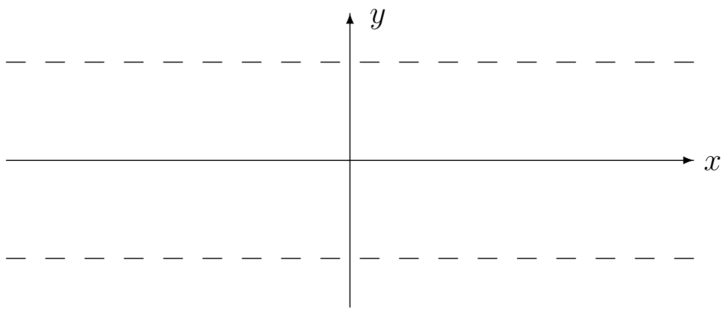
Skizzieren Sie den Graph der Sinusfunktion $sin(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$.



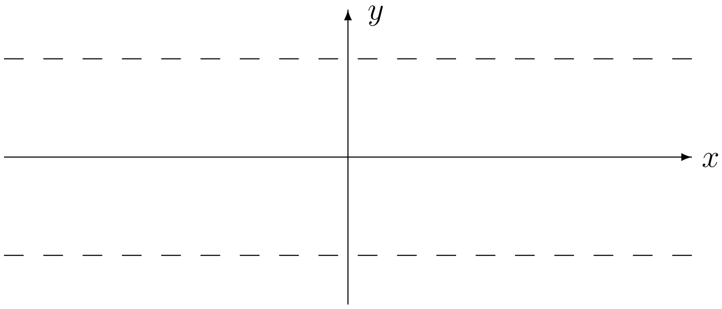
Skizzieren Sie den Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion $sin'(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ (auch kurz 1.Ableitung genannt). Tipp : Konzentrieren Sie sich auf die Wendepunkte, die Steigung der Tangente an den Sinus ist maximal gleich eins!



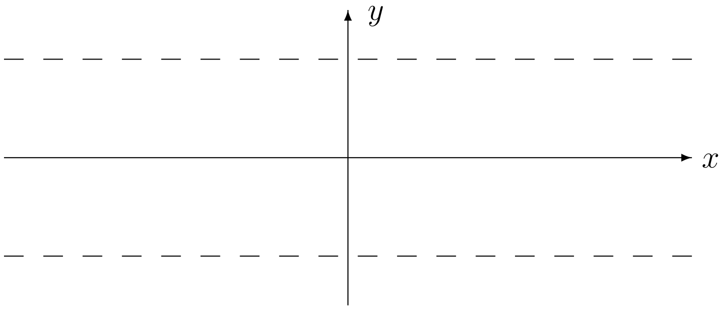
Skizzieren Sie den Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion $sin''(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ (auch kurz 2.Ableitung genannt, es ist also die Ableitung der Ableitung).



Skizzieren Sie den Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion $sin'''(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ (auch kurz 3.Ableitung genannt).



Skizzieren Sie den Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion $sin^{(IV)}(x)$ für $x \in [-\pi, \pi]$(auch kurz 4.Ableitung genannt).



Was ist Ihre Vermutung ? Geben Sie für jeden erhaltenen Graph eine mögliche analytische Formel an !

$$sin'(x) = cos(x)$$
$$sin''(x) = cos'(x) = -sin(x)$$
$$sin'''(x) = cos''(x) = -sin'(x) = -cos(x)$$
$$sin''''(x) = cos'''(x) = -sin''(x) = -cos'(x) = sin(x)$$

Aufgabe 6 : **4 Punkte**

Berechnen Sie den Differentialquotienten der gegebenen Funktion an der Stelle $x_0 = 1$:

a)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

b)

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Bestimmen Sie die 1.Ableitungsfunktion $f'(x)$ der Funktion $f(x)$:

c)

$$f(x) = x^2 + 3$$

d)

$$f(x) = 2x^3$$

Lösungen :

a)

$$f'(1) = 1$$

b)

$$f'(1) = 2 - 2 = 0$$

c)

$$f'(x) = 2x$$

d)

$$f'(x) = 6x^2$$